ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Ачилов Ислам Азаматович

Старший преподаватель кафедры «Высшая математика»

Каршинского государственного технического университет

Узбекистан г. Карши,

Аннотация. В данной работе рассматриваются линейный интеграл и циркуляция векторного поля как важные понятия математического анализа и теории поля. Изучаются основные определения, свойства и методы вычисления линейных интегралов по кривой. Особое внимание уделяется физическому и геометрическому смыслу циркуляции векторного поля, а также условиям независимости интеграла от пути интегрирования. Приводятся примеры применения линейных интегралов в механике, физике и инженерных задачах. Работа направлена на формирование понимания связи между векторными полями, криволинейными интегралами и их практическим использованием.

Annotation. This paper examines the line integral and vector field circulation as important concepts in mathematical analysis and field theory. It explores the basic definitions, properties, and methods for calculating line integrals along a curve. Particular attention is paid to the physical and geometric meaning of vector field circulation, as well as the conditions for path-independence of the integral. Examples of the application of line integrals in mechanics, physics, and engineering are provided. The paper aims to develop an understanding of the relationship between vector fields, line integrals, and their practical applications.

Ключевые слова: линейный интеграл, циркуляция векторного поля, радиуса-вектора ,ориентированной кривой, криволинейный интеграл первого и второго рода, скалярное произведение, замкнутой линии, кусочно-гладкая.

Keywords: linear integral, circulation of a vector field, radius vector, oriented curve, curvilinear integral of the first and second kind, scalar product, closed line, piecewise smooth.

Пусть данный непрерывное векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ и кусочно-гладкая кривая L, на которой выбрано положительное направление (ориентированная кривая).

Определение 1. Линейный интегралом от вектора $\vec{a} = \vec{a}(M)$ вдоль ориентированной кривой L называется криволинейный интеграл первого рода(интеграл по длине дуги кривой) от скалярного произведения $(\vec{a}, \tau^0)$

$$\int_L (\vec{a}, \tau^0) ds,$$

Где $\vec{\tau}^0 = \vec{\tau}^0(M)$ - орт вектора, касательного к линии L, ds -дифференциал длины дуги S кривой L.

Если $\vec{r} = \vec{r}(M)$ есть радиус-вектор произвольной точки M линии L, то линейный интеграл в поле $\vec{a}(\mathrm{M})$ можно записать в виде

$$\int_L (\vec{\mathrm{a}}, \vec{\tau})\,\mathrm{ds} = \int_L (\vec{\mathrm{a}}, \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}) \qquad \textbf{(1)}$$

Если в векторном поле введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ и линейный интеграл (1) выразится через криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L P(x, y, z)\,\mathrm{dx} + Q(x, y, z)\,\mathrm{dy} + R(x, y, z)\,\mathrm{dz}$$

В случае, когда $\vec{a} = \vec{a}(M)$ является силовым полем, линейный интеграл (1) дает величину работы этого поля вдоль линии L.

Свойства линейного интеграла.

а) Линейность: $\int_L (\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2) d\vec{r} = \lambda\int_L (\vec{a}_1, d\vec{r}) + \mu\int_L (\vec{a}_2, d\vec{r})$

Где λ, μ - постоянные числа.

б) Аддитивность: $\int_{L_1+L_2} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{L_1} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{L_2} (\vec{a}, d\vec{r})$.

в) При изменении ориентации линии L интеграл меняет знак:

$$\int_{BA} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int_{AB} (\vec{a}, d\vec{r})$$

где A - начальная, а B - конечная точки линии L.

Вычисление линейного интеграла в векторном поле.

Пусть линия L задана параметрическими уравнениями

$x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t), t_0 \le t \le 1$

при этом в начальной точке A линии L параметр t принимает значение $t=t_0$,а в конечной точке B линии L - значение $t=t_1$ (направлении на линии L соответствует возрастанию параметра t от t_0 до t_1); функции $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[t_0,t_1]$. Тогда

$$\int_L(\vec{a},d\vec{r})=\int_{AB}(\vec{a},d\vec{r})=\int_{t_0}^{t_1}\Big(P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\psi'(t)+R\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\chi'(t)\Big)dt$$

Аналогичные формулы можно написать и для случаев, когда линия задается одной из следующих систем уравнений:

$x=\varphi(y)$, $z=\chi(y)$, $(y_0 \le y \le y_1)$ или

$x=\varphi(\mathrm{z})$, $y=\psi(\mathrm{z})$, $(\mathrm{z}_0 \le z \le \mathrm{z}_1)$.

Пример – 1. Найти линейный интеграл от вектора $a=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор, вдоль прямой от точки $A=(\vec{r}_A)$ до точки $B=(\vec{r}_B)$.

Решение. Искомым линейным интегралом будет

$$\int_{AB}(\vec{a},d\vec{r})=\int_{AB}\frac{(\vec{r},d\vec{r})}{|\vec{r}|} \qquad (1)$$

Из равенства $d(\vec{r},\vec{r})=(d\vec{r},\vec{r})+(\vec{r},d\vec{r})=2(\vec{r},d\vec{r})$.

на находим $(\vec{r},d\vec{r})=\frac{1}{2}d(\vec{r},\vec{r})=\frac{1}{2}d\left(|\vec{r}|^2\right)=\frac{1}{2}\cdot 2|\vec{r}|d|\vec{r}|=|\vec{r}|d|\vec{r}|$.

Отсюда $$\frac{(\vec{r},d\vec{r})}{|\vec{r}|}=d|\vec{r}| \qquad (2)$$

Подставляя (2) в интеграл (1) будем иметь

$$\int_{AB}(\vec{a},d\vec{r})=\int_{AB}d|\vec{r}|=\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}d|\vec{r}|=|\vec{r}_B|-|\vec{r}_A|.$$

Следует обратить внимание на то, что $|d\vec{r}| \ne d|\vec{r}|$.

Пример – 2. Найти линейный интеграл от вектора $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ вдоль дуги L винтовой линии $x = r\cos t,\quad y = r\sin t,\ z = \dfrac{t}{2\pi}$ от точки A пересечения линии с плоскостью $z = 0$ до точки B пересечения с плоскостью $z = 1$

Решение. Линейный интерал в данном примере имеет вид

$$\int\limits_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_L zdx + xdy + ydz \ .$$

Винтовая линия расположена на круговом цилиндре $x^2 + y^2 = R^2$ В точке А имеем $t_0 = 0$, в точке B имеем $t_1 = 2\pi$.Так как $dx = -R\sin tdt,\ dy = R\cos tdt,\ dz = \dfrac{dt}{2\pi}$ то интеграл будет равен

$$\int\limits_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_0^{2\pi} (-\frac{t}{2\pi} R\sin t + R^2\cos^2 t + \frac{R}{2\pi}\sin t)dt = R\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 tdt - \frac{R}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} t\sin tdt = \pi R^2 + R$$

Так как $\cos^2 tdt = \pi$; $\int\limits_0^{2\pi} t\sin tdt = -2\pi$.

Пример – 3 . Найти линейный интеграл от вектора (см.пример 2) $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ вдоль прямой АВ в направлении от точки A к точке В.

Решение. Так как прямая АВ(образуюшая цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$)расположена на плоскость xOz и проходит через точку $A(R,0,0)$,то $y = 0, x = R, dx = 0$ и для радиуса-вектора $\vec{r} = R\vec{i} + z\vec{k}, d\vec{r} = dz \cdot \vec{k}$.Поэтому скалярное произведение

$$\left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = zdx + xdy + ydz = 0$$

Из примеров 2 и 3 следует, что в общем случае линейный интеграл в векторном поле зависит не только от начальной и конечной точек пути интегрирования, но и от формы этого пути.

Пример – 4. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$ вдоль отрезка АВ прямой, проходящей через точки $M_1(2,3,4)$ и $M_2\left(3,4,5\right)$.

Решение. Работа данного силового поля будет равна линейному интегралу вдоль отрезка M_1M_2

$$A = \int_{M_1M_2} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \int_{M_1M_2} ydx + xdy + \left(x + y + z\right)$$

Находим канонические управления прямой M_1M_2. Имеем

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}$$

Отсюда $y = x+1,\quad z = x+2,\quad dy = dx,\quad dz = dx$.

Здесь x изменяется в переделах от 2 до 3 (так как абсцисса точки M_1 равна 2, а абсцисса точки M_2 равна 3). Искомая работа будет равна

$$A = \int_2^3 \left(x+1+x+x+x+1+x+2\right)dx = \int_2^3 \left(5x+4\right)dx = \frac{33}{2}.$$

Циркуляция векторного поля - это характеристика того, насколько поле “закручивается” вдоль некоторого замкнутого контура.

Для векторного поля

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

циркуляция по контуру L определяется криволинейным интегралом:

$$Ц = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

или в координатной форме:

Ц$= \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

где:

– $\overrightarrow{F}$ - векторное поле,

– $d\vec{r}$ - элемент перемещения вдоль контура,

- знак $\oint$ означает интегрирование по замкнутой линии.

Физический смысл:

Циркуляция показывает работу поля при движении частицы по замкнутому пути.

- Если циркуляция равна нулю, поле не имеет вихревого характера.

- Если не равна нулю — поле обладает вращением (вихрем).

Связь с ротором (теорема Стокса)

Циркуляция связана с ротором поля:

$$Ц = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\mathrm{rot}\ \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$$

Это означает:

циркуляция по контуру равна потоку ротора через поверхность, ограниченную этим контуром.

Пример-5.

Рассмотрим поле

$$\vec{F} = (-y, x)$$

и контур L— окружность радиуса R:

$$x = R\cos\ t, y = R\sin\ t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Тогда

$$dx = -R\sin\ t\, dt, dy = R\cos\ t\, dt$$

Циркуляция: $Ц = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_L (-y\, dx + x\, dy)$

Подставляем:

$$-y\, dx = -(R\sin\ t)(-R\sin\ t\, dt) = R^2 \sin^2 t\, dt$$
$$x\, dy = (R\cos\ t)(R\cos\ t\, dt) = R^2 \cos^2 t\, dt$$

Получаем:

$$Ц = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt$$

Так как $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$,

То $Ц = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R^2$

Пример -6.

Пусть $\vec{F} = (x, y)$

и тот же контур — окружность.

Циркуляция: $Ц = \oint_L (x\, dx + y\, dy)$ но $x\, dx + y\, dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2)$

Тогда $Ц = \oint_L \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = 0$ потому что интеграл полного дифференциала по замкнутому контуру равен нулю.Такое поле потенциально и не содержит вихря.

Пример -7. Через ротор (формула Стокса)

Поле: $\overrightarrow{\vec{F}} = (-y, x, 0)$ Найдём ротор: $\text{rot}\,\vec{F} = \left(0{,}0, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)$ или $\text{rot}\ \vec{F} = (0{,}0{,}2)$

По теореме Стокса: Ц=$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{rot}\ \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = 2 \cdot \pi R^2$

Использованная литература:

1. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, том.2. Издательство «Наука», Главная редакция, физико-математической литературы, Москва.1974.
2. И.И.Ромоновкий Ряды Фурье. Теория поля. Аналитеский и специальные функции. Преобразование Лапласа. Москва, «Наука» ,1980.
3. Д.Т.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. Часть-1. Москва, «Наука”, 2000.
4. Г.Н.Берман. Сборник задач по математическому анализу. Москва, “Наука”, 1985.
5. И.А.Зайцев. Высшая математика.Москва, «Наука”, 1991.